EX 14 :

$f(x) = x.\sqrt{1-x^2}$; $x \in [0,1[$

1) f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$

$f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]0,1[$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
g'(x)	+	0	-
g(x)	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘ 0

2) $g(x) = f(x)$; $x \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

a) g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ elle réalise donc une bijection de $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ sur $I=g\left(\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)=\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

b) • g^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

• g^{-1} est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$

on pose $y=g^{-1}(x)$ avec $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $y \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y\sqrt{1-y^2} = x \Leftrightarrow y^2(1-y^2) = x^2$

$\Leftrightarrow y^4 - y^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - x^2$

$\Leftrightarrow \left|y^2 - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - y^2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$ car $y^2 \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x^2})$

$y = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x^2})}$ car $y \ge 0$

$g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}}$

3) $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) * pour n=0 , on a $0 \le U_0 = \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ (vrai)

* supposons que : $0 \le U_n \le \frac{1}{2}$

et montrons que : $0 \le U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

$0 \le U_n \le \frac{1}{2}$

f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\Rightarrow$

$f(0) \le f(U_n) \le f(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le \dfrac{1}{2}$

conclusion : $0 \le U_n \le \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) b) $U_{n+1} - U_n = U_n\sqrt{1-U_n^2} - U_n = U_n.\left[\sqrt{1-U_n^2} - 1\right]$

$= U_n.\dfrac{-U_n^2}{\sqrt{1-U_n^2}+1} = \dfrac{-U_n^3}{\sqrt{1-U_n^2}+1} \le 0$ car $U_n \ge 0$

d'où (U_n) est décroissante

c) * (U_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

$0 \le U_n \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \ell \le \frac{1}{2}$

$U_{n+1} = f(U_n)$

f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell\sqrt{1-\ell^2} = \ell \Leftrightarrow \ell^2.(1-\ell^2) = \ell^2 \Leftrightarrow -\ell^4 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn